

# Chapitre I

## Modélisation

# Énoncé du problème

Une entreprise fabrique deux produits  $A$  et  $B$ , en utilisant une machine  $m$  et deux matières premières  $p$  et  $q$ .

On suppose que :

- la production d'une unité de  $A$  nécessite 2 kg de  $p$  et 9 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 1 heure ;
- la production d'une unité de  $B$  nécessite 2 kg de  $p$  et 4 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 2 heures.

Les profits réalisés sont de :

50 dh par unité de  $A$  et 60 dh par unité de  $B$ .

# Énoncé du problème

Une entreprise fabrique deux produits  $A$  et  $B$ , en utilisant une machine  $m$  et deux matières premières  $p$  et  $q$ .

On suppose que :

- la production d'une unité de  $A$  nécessite 2 kg de  $p$  et 9 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 1 heure ;
- la production d'une unité de  $B$  nécessite 2 kg de  $p$  et 4 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 2 heure.

Les profits réalisés sont de :

50 dh par unité de  $A$  et 60 dh par unité de  $B$ .

# Énoncé du problème

Une entreprise fabrique deux produits  $A$  et  $B$ , en utilisant une machine  $m$  et deux matières premières  $p$  et  $q$ .

On suppose que :

- la production d'une unité de  $A$  nécessite 2 kg de  $p$  et 9 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 1 heure ;
- la production d'une unité de  $B$  nécessite 2 kg de  $p$  et 4 kg de  $q$ , et utilise la machine  $m$  durant 2 heures.

Les profits réalisés sont de :

50 dh par unité de  $A$  et 60 dh par unité de  $B$ .

# Énoncé du problème

**O**n dispose chaque jour de :

8 heures de  $m$ , de 10 kg de  $p$  et de 36 kg de  $q$ .

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

**A**utrement dit :

Combien d'unités de  $A$  et de  $B$  doit-on produire afin d'obtenir un profit maximal ?

# Énoncé du problème

**O**n dispose chaque jour de :

8 heures de  $m$ , de 10 kg de  $p$  et de 36 kg de  $q$ .

**L'**objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

**A**utrement dit :

Combien d'unités de  $A$  et de  $B$  doit-on produire afin d'obtenir un profit maximal ?

# Énoncé du problème

**O**n dispose chaque jour de :

8 heures de  $m$ , de 10 kg de  $p$  et de 36 kg de  $q$ .

**L'**objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

**A**utrement dit :

Combien d'unités de  $A$  et de  $B$  doit-on produire afin d'obtenir un profit maximal ?

# Énoncé du problème

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème de production :

	A	B	Disponible
$m$	1 h	2 h	8 h
$p$	2 kg	2 kg	10 kg
$q$	9 kg	4 kg	36 kg
Profit unitaire	50 dh	60 dh	



# Les variables de décision

**Q**uelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ?

Il suffit de connaître la quantité de A et celle de B à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

**A**gissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

$x_1$  = la quantité du produit A à produire

$x_2$  = la quantité du produit B à produire

**L**es variables  $x_1$  et  $x_2$  sont dites **variables de décision**.

# Les variables de décision

**Q**uelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ?

**I**l suffit de connaître la quantité de **A** et celle de **B** à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

**A**gissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

$x_1$  = la quantité du produit A à produire

$x_2$  = la quantité du produit B à produire

**L**es variables  $x_1$  et  $x_2$  sont dites **variables de décision**.

# Les variables de décision

**Q**uelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ?

**I**l suffit de connaître la quantité de **A** et celle de **B** à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

**A**gissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

$x_1$  = la quantité du produit A à produire

$x_2$  = la quantité du produit B à produire

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont dites **variables de décision**.

# Les variables de décision

**Q**uelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ?

**I**l suffit de connaître la quantité de **A** et celle de **B** à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

**A**gissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

$x_1$  = la quantité du produit A à produire

$x_2$  = la quantité du produit B à produire

**L**es variables  $x_1$  et  $x_2$  sont dites **variables de décision**.

# La fonction objectif

**Q**uel profit retirera l'entreprise de la vente de ces deux produits ?

**I**l s'agit, tout simplement, d'additionner les bénéfices à tirer de chacun des 2 produits :

- pour **A**, elle retire 50 dh par unité et en fabrique  $x_1$  unités ; cette production lui rapporte donc un profit de  $(50x_1)$  dh ;
- de même, la quantité  $x_2$  de **B** lui permet de faire un profit de  $(60x_2)$  dh.

# La fonction objectif

Le profit total à tirer des deux produits s'élève donc à :

$$(50x_1 + 60x_2) \text{ dh}$$

On dénote ce profit total par  $z$  et laisse implicite l'unité monétaire :

$$z = 50x_1 + 60x_2$$

On cherche évidemment à rendre  $z$  **aussi grand que possible** en donnant à  $x_1$  et  $x_2$  des valeurs appropriées.

# La fonction objectif

La grandeur  $z$  est une fonction qui, à chaque plan de production  $(x_1, x_2)$ , associe le nombre de dirhams que l'entreprise retirerait comme profit si elle adoptait ce plan.

Cette fonction  $z$ , qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**.

Comme on cherche à rendre  $z$  aussi grand que possible, on écrit :

$$\text{Maximiser } z \quad \text{où } z = 50x_1 + 60x_2$$

Ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$\text{Max } z = 50x_1 + 60x_2$$

# Les contraintes

**S**'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximiser  $z$ , il suffirait de laisser augmenter  $x_1$  ou  $x_2$  pour que  $z$  prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite.

**M**ais s'attendre à de tels profits s'apparente plus au rêve qu'à la situation de notre entreprise.

**I**l y a bien sûr des empêchements naturels, appelés **contraintes**, qui freinent le rêve d'un profit infini.



# Les contraintes

**P**renons en considération tour à tour chacune des contraintes.

# Les contraintes

## Contrainte relative à la machine $m$

**L**e temps d'utilisation de la machine  $m$  pour fabriquer les produits  $A$  et  $B$  ne peut excéder les 8 heures disponibles :

Temps d'utilisation de  $m \leq 8$ .

**C**e temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits.

# Les contraintes

**P**our A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité  $x_1$  se calcule ainsi :

$$1 \text{ heure}/(\text{unité de A}) \times x_1 (\text{unité de A}) = x_1 \text{ heures}$$

pour B, on procède de façon analogue :

$$2 \text{ heure}/(\text{unité de B}) \times x_2 (\text{unité de B}) = 2x_2 \text{ heures}$$

**L**a contrainte relative à la machine  $m$  s'écrit donc :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (m)$$

# Les contraintes

**P**our A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité  $x_1$  se calcule ainsi :

$$1 \text{ heure}/(\text{unité de A}) \times x_1 (\text{unité de A}) = x_1 \text{ heures}$$

pour B, on procède de façon analogue :

$$2 \text{ heure}/(\text{unité de B}) \times x_2 (\text{unité de B}) = 2x_2 \text{ heures}$$

**L**a contrainte relative à la machine  $m$  s'écrit donc :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (m)$$

# Les contraintes

## Contraintes relatives aux matières premières

**E**n s'inspirant de la contrainte relative à la machine, ces contraintes s'écrivent tout naturellement :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (p)$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (q)$$

# Les contraintes

## Contraintes de positivité

**E**lles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables).

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

# Le modèle

**L**e modèle se résume ainsi :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{soit : } x_1 + x_2 \leq 5$$

# Le modèle

**L**e modèle se résume ainsi :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{soit : } x_1 + x_2 \leq 5$$



# Variables d'écart

**A**fin de ramener les contraintes à des **égalités** (qui sont plus faciles à traiter que les inégalités), on introduit des **variables d'écart**.

**C**es variables seront toujours, comme les variables de décision  $x_1$  et  $x_2$ , positives ou nulles.

**L**a variable d'écart d'une contrainte représente la quantité disponible **non utilisée**. C'est **l'écart** entre la disponibilité et le besoin.

# Variables d'écart

**A**près l'ajout des variables d'écart  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  relatives aux contraintes  $(m)$ ,  $(p)$  et  $(q)$ , nous obtenons la formulation :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 & & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + 2x_2 & + x_4 & = 10 \\ 9x_1 + 4x_2 & & + x_5 = 36 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

# Généralisation : Problème de production

Soient  $m$  machines  $M_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) qui fabriquent en série  $n$  types de produits  $P_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $M_i$  a une capacité maximum de  $b_i$  unités de temps. La fabrication d'une unités de  $P_j$  nécessite l'utilisation de  $M_i$  durant  $a_{ij}$  unités de temps.

Si  $c_j$  représente le gain relatif à la production d'une unité du produit  $P_j$ , le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (M_1) \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (M_2) \\ & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (M_m) \\ & x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0 \end{array} \right.$$

# Énoncé du problème

Un agriculteur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C.

L'agriculteur achète deux types d'aliments P et Q :

- une unité de P comprend 2 unités de A, 1 unité de B et 1 unité de C ; et elle coûte 20 dh
- une unité de Q comprend 1 unité de A, 1 unité de B et 3 unités de C ; et elle coûte 40 dh.

Les exigences quotidiennes sont de :

16 pour A, 12 pour B et 18 pour C.

# Énoncé du problème

Un agriculteur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C.

L'agriculteur achète deux types d'aliments P et Q :

- une unité de P comprend 2 unités de A, 1 unité de B et 1 unité de C ; et elle coûte 20 dh
- une unité de Q comprend 1 unité de A, 1 unité de B et 3 unités de C ; et elle coûte 40 dh.

Les exigences quotidiennes sont de :

16 pour A, 12 pour B et 18 pour C.

# Énoncé du problème

**U**n agriculteur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs **A**, **B** et **C**.

**L**'agriculteur achète deux types d'aliments **P** et **Q** :

- une unité de **P** comprend 2 unités de **A**, 1 unité de **B** et 1 unité de **C** ; et elle coûte 20 dh
- une unité de **Q** comprend 1 unité de **A**, 1 unité de **B** et 3 unités de **C** ; et elle coûte 40 dh.

**L**es exigences quotidiennes sont de :

16 pour **A**, 12 pour **B** et 18 pour **C**.

# Énoncé du problème

L'agriculteur cherche la combinaison la moins coûteuse des quantités de **P** et **Q** qui respectera l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs.

Le tableau suivant résume les données relatives ce problème :

	<b>P</b>	<b>Q</b>	Besoins minimaux
<b>A</b>	2	1	16
<b>B</b>	1	1	12
<b>C</b>	1	3	18
Coût unitaire	20 dh	40 dh	

# La construction d'un modèle linéaire

**A**ppelons  $x_1$  et  $x_2$  les quantités des aliments **P** et **Q** qu'il faut acheter.

**L'**objectif de l'agriculteur est évidemment de minimiser le coût total des aliments qu'il faut acheter. Mathématiquement cela s'écrit :

$$\text{Minimiser } z = 20x_1 + 40x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abrégéer comme suit :

$$\text{Min } z = 20x_1 + 40x_2$$



# La construction d'un modèle linéaire

**C**haque des 3 éléments nutritifs à considérer donne lieu à une contrainte, qui vise à exiger que les aliments, dans leur ensemble, satisfassent les besoins quotidiens du troupeau. On obtient :

$$2x_1 + x_2 \geq 16 \quad (\text{A})$$

$$x_1 + x_2 \geq 12 \quad (\text{B})$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 18 \quad (\text{C})$$

**L**es contraintes ci-dessus emploient le signe «  $\geq$  » parce qu'il faut respecter les exigences de consommation minimales, mais que celles-ci peuvent être dépassées.

# La construction d'un modèle linéaire

**E**nfin, il faut pas oublier qu'on peut pas acheter des quantités négatives de **P** ou **Q** :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Le modèle se résume ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = 20x_1 + 40x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

# Généralisation : Problème de mélange

Il s'agit de rechercher un régime alimentaire qui, tout en étant le meilleur marché possible, garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.

Soient  $n$  aliments de prix  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) par unité ;  $m$  éléments nutritifs ;  $a_{ij}$  la quantité du  $i^{\text{ème}}$  élément nutritif contenue dans une unité du  $j^{\text{ème}}$  aliment ;  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) les **besoins** respectifs en les  $m$  éléments nutritifs.

# Généralisation : Problème de mélange

**S**i les variables  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) représentent les quantités des divers aliments du régime, on obtient le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0 \end{array} \right.$$